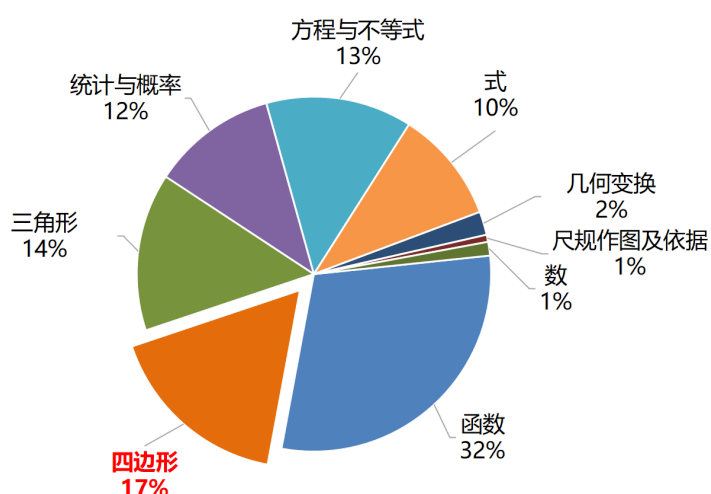


第1讲 四边形中的最值问题

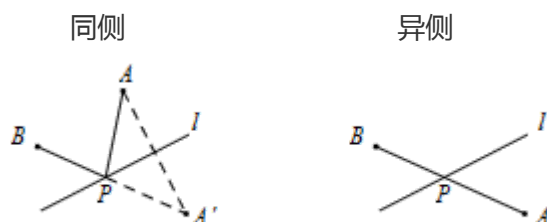
平行四边形属于人教版第十八章的内容，是期中、期末考试的重要知识点，主要考察平行四边形的性质和判定，故这部分我们分为《平行四边形》、《四边形的最值和折叠问题》、《四边形的中点问题》、《正方形专题》、《四边形综合》五个模块。本模块为《四边形中的最值与折叠问题》，旨在帮助学生了解四边形最值与折叠问题的常见题型，理清解题思路。

本模块难度较大，适用于平行四边形最值与折叠问题的专项突破，本模块分为四边形中的最值问题、四边形中的折叠问题2讲内容，帮助学生梳理综合题的解题思路，学会将所学知识进行综合运用。

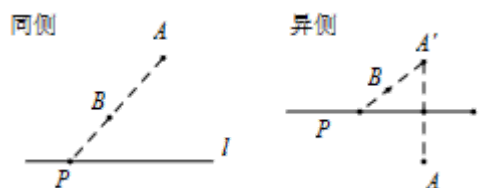


一、将军饮马问题

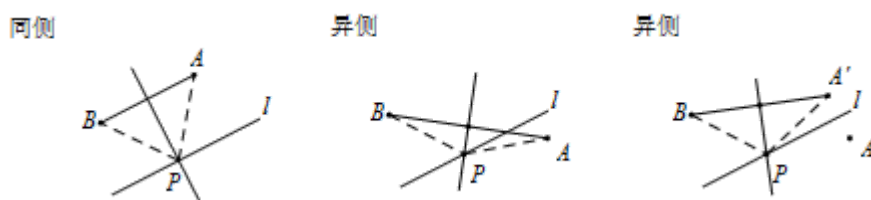
🕒 线段和最小



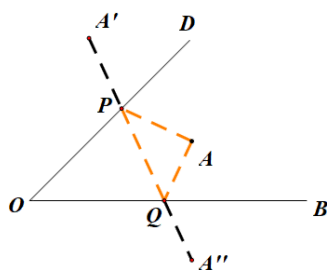
🕒 线段差最大



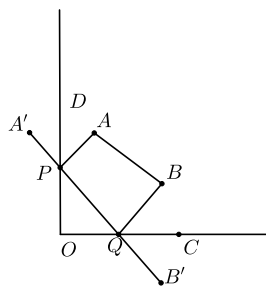
🕒 线段差最小



🕒 三角形周长最小

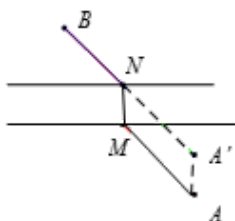


🔗 四边形周长最小

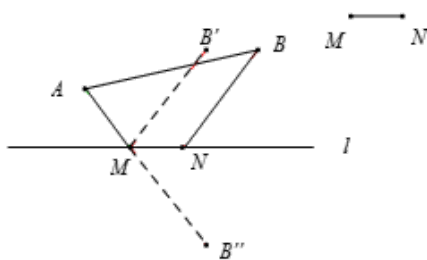


🔗 过河最短距离

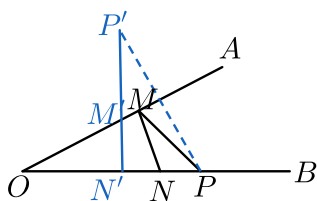
类型一



类型二

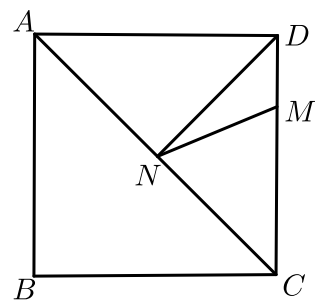


🔗 垂线段最短



📊 例题1

1. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为8， M 在 CD 上，且 $DM = 2$ ， N 是 AC 上一动点，则 $DN + MN$ 的最小值为（ ）。



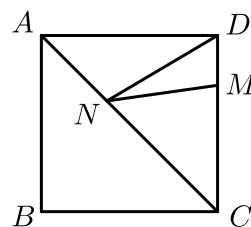
A. 6

B. 8

C. 10

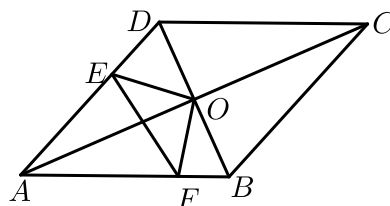
D. $8\sqrt{2}$

2. 如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， M 是 DC 上的一点，且 $DM = 2$ ， N 是 AC 上的一动点，求 $|DN - MN|$ 的最小值与最大值（ ）。



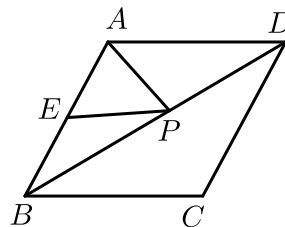
- A. 0, 1 B. 0, 2 C. 1, 1 D. 1, 2

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E ， F 分别是边 AD ， AB 上的点，连接 OE ， OF ， EF 。 $AB = 7$ ， $BC = 5\sqrt{2}$ ， $\angle DAB = 45^\circ$ ，则 $\triangle OEF$ 周长的最小值是 _____。



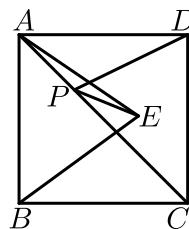
练习1

4. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的周长为16，面积为 $8\sqrt{3}$ ， E 为 AB 的中点，若 P 为对角线 BD 上一动点，则 $EP + AP$ 的最小值为（ ）。



- A. 2 B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $4\sqrt{3}$

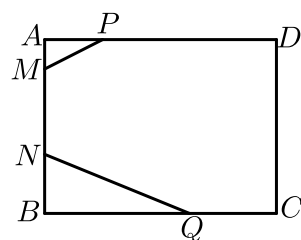
5. 如图，正方形 $ABCD$ 的面积为16， $\triangle ABE$ 是等边三角形，点 E 在正方形 $ABCD$ 内，在对角线 AC 上有一点 P ，使 $PD + PE$ 的和最小，则这个最小值为（ ）。



- A. $\sqrt{8}$ B. 3 C. 4 D. $\sqrt{32}$

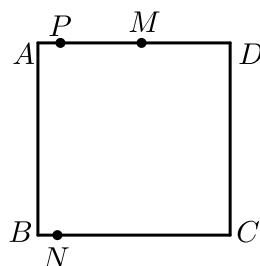
|| 例题2

6. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， MN 在边 AB 上运动， $MN = 3$ ， $AP = 2$ ， $BQ = 5$ ， $PM + MN + NQ$ 最小值是 _____ 。

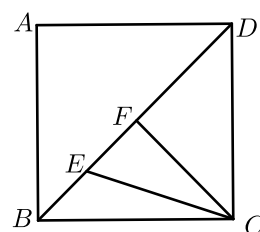


|| 练习2

7. 如图，在边长为8正方形 $ABCD$ 中， P 是 AD 边上一点，且 $AP = 1$ ， N 、 M 分别是 BC 、 PD 上的动点，小球 Q 从点 A 出发沿 $AP - PN - NM - MC$ 的路线运动，则折线 $APNMC$ 的最小值为 _____ 。

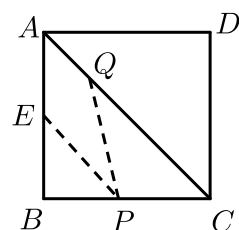


8. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为6， E ， F 是对角线 BD 上的两个动点，且 $EF = 2\sqrt{2}$ ，连接 CE ， CF ，则 $\triangle CEF$ 周长的最小值为 _____ 。



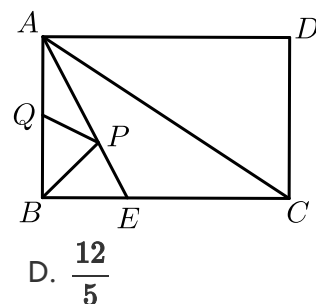
|| 例题3

9. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4，点 E 是 AB 的中点，点 P 是边 BC 上的动点，点 Q 是对角线 AC 上的动点（包括端点 A ， C ），则 $EP + PQ$ 的最小值是 _____ 。



练习3

10. 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 E , P 、 Q 分别是 AE 、 AB 上的动点, 则 $PB + PQ$ 的最小值是() .



- A. 5 B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{12}{5}$

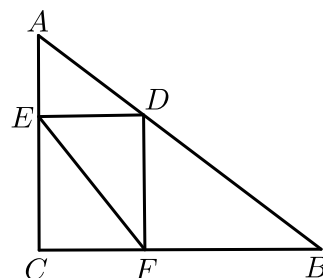
二、 线段最值问题

1. 构造对角线求最值

四边形	对角线的性质
平行四边形	
矩形	
菱形	
正方形	

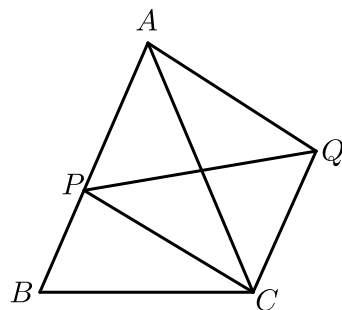
例题4

11. 如图所示, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, D 是 AB 上一动点, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , $DF \perp BC$ 于点 F , 连接 EF , 则线段 EF 的最小值是() .



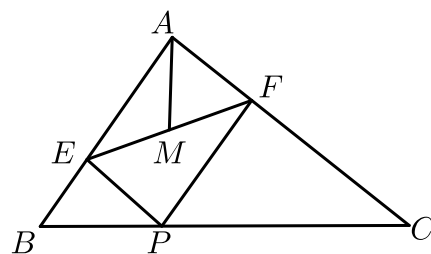
- A. 5 B. 4.8 C. 4.6 D. 4.4

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $AB = AC = 8$ ， P 为 AB 边上一动点，以 PA 、 PC 为边作平行四边形 $PAQC$ ，则对角线 PQ 的最小值为 _____ 。

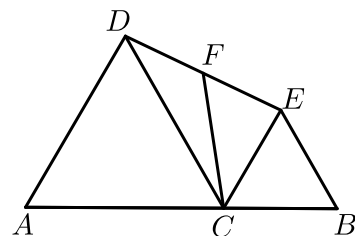


练习4

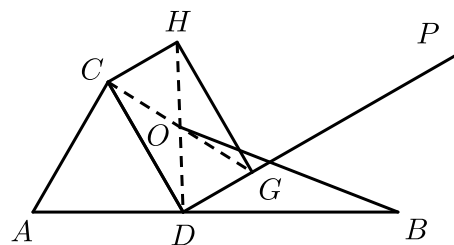
13. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， P 为边 BC 上一动点（ P 不与 B 、 C 重合）， $PE \perp AB$ 于 E ， $PF \perp AC$ 于 F ， M 为 EF 中点，则 AM 的取值范围是 _____ 。



14. 如图，已知 $AB = 6$ ， C 是线段 AB 上一动点，分别以 AC 、 CB 为边作等边三角形 ACD 和 BCE ，连接 DE ， F 为 DE 中点，则 CF 的最小值是 _____ 。

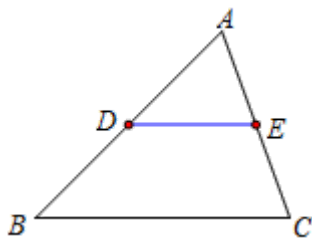


15. 如图所示，线段 AB 的长为 $20\sqrt{2}\text{cm}$ ，点 D 在线段 AB 上， $\triangle ACD$ 的边长为 10cm 的等边三角形，过点 D 作 CD 垂直的射线 DP ，过 DP 上一动点 G （不与 D 重合）作矩形 $CDGH$ ，记矩形 $CDGH$ 的对角线交点为 O ，连接 OB ，则线段 BO 的最小值为 _____ 。



2. 中位线最值问题

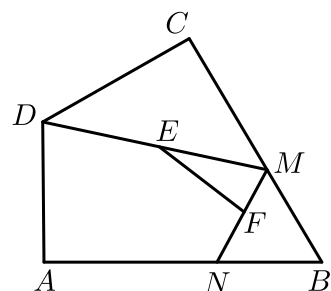
中位线定理：三角形的中位线_____于三角形的第三边，并且_____第三边的_____。



如图：_____

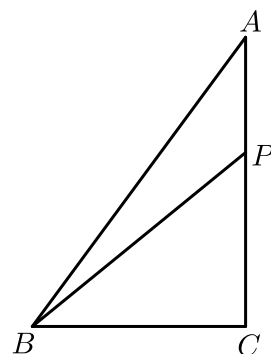
|| 例题5

16. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{5}$ ， $AD = 2$ ，点 M ， N 分别为线段 BC ， AB 上的动点（含端点，但点 M 不与点 B 重合），点 E ， F 分别是 DM ， MN 的中点，则 EF 长度的最大值为_____。



|| 练习5

17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ， P 为 AC 边上的一动点，以 PB ， PA 为边构造平行四边形 $APBQ$ ，则对角线 PQ 的最小值为（ ）。



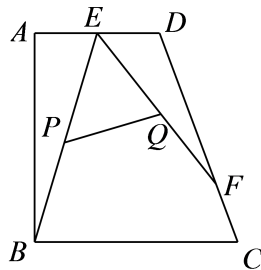
A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

18. 如图所示, 已知四边形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, E 、 F 分别是 DA 、 DC 上的动点, P 、 Q 分别是 BE 、 EF 的中点. 若 $BC = 10$, $AB = 6\sqrt{3}$, 则 PQ 的取值范围是 _____.

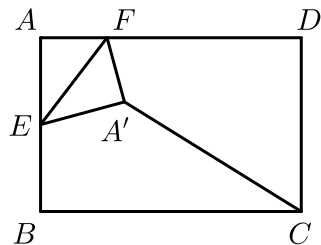


3. 利用三边关系求解最值

三角形第三边的取值范围: _____ < 第三边 < _____

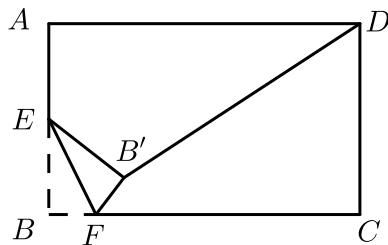
|| 例题6

19. 如图, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 3$, 点 E 是 AB 的中点, 点 F 是 AD 边上的一个动点, 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 所在直线翻折, 得到 $\triangle A'EF$, 则 $A'C$ 的长的最小值是 _____.

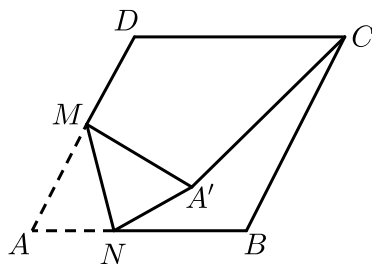


|| 练习6

20. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $AD = 8$, E 是 AB 边的中点, F 是线段 BC 的动点, 将 $\triangle EBF$ 沿 EF 所在直线折叠得到 $\triangle EB'F$ 连接 $B'D$, 则 $B'D$ 的最小值是 _____.

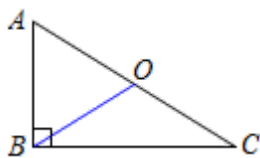


21. 如图，在边长为4的菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是 AD 边的中点，点 N 是 AB 边上一动点，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 所在的直线翻折得到 $\triangle A'MN$ ，连接 $A'C$ ，则线段 $A'C$ 长度的最小值是 _____ 。



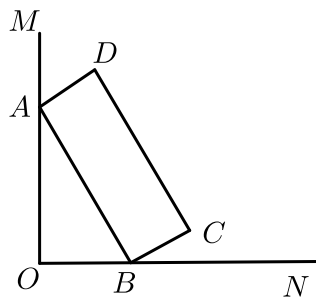
4. 构造斜边中线求最值

由矩形的性质可以推出，直角三角形的性质：**直角三角形斜边上的中线等于_____**。



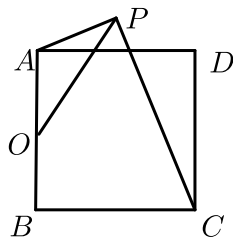
|| 例题7

22. 如图， $\angle MON = 90^\circ$ ，矩形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 分别在边 OM ， ON 上，当 B 在边 ON 上运动时， A 随之在 OM 上运动，矩形 $ABCD$ 的形状保持不变，其中 $AB = 2$ ， $BC = 1$ ，运动过程中，点 D 到点 O 的最大距离为 _____ 。



|| 练习7

23. 如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， O 为 AB 的中点， P 为正方形 $ABCD$ 外一动点，且 $AP \perp CP$ ，则线段 OP 的最大值为（ ）。



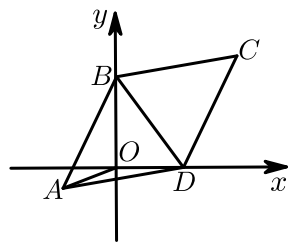
A. $4 + 4\sqrt{2}$

B. $2 + 4\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{2}$

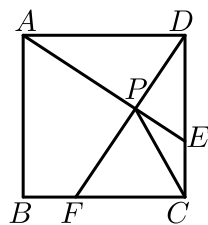
D. 6

24. 如图，已知菱形 $ABCD$ 中， $BC = 10$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ 两顶点 B 、 D 分别在平面直角坐标系的 y 轴、 x 轴的正半轴上滑动，连接 OA ，则 OA 的长的最小值是 _____ 。



例题8

25. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，动点 E ， F 分别从 D ， C 两点同时出发，以相同的速度在边 DC ， CB 上移动，连接 AE 和 DF 交于点 P ，由于点 E ， F 的移动，使得点 P 也随之运动，若 $AD = 2$ ，线段 CP 的最小值是（ ）。



A. $\sqrt{2}$

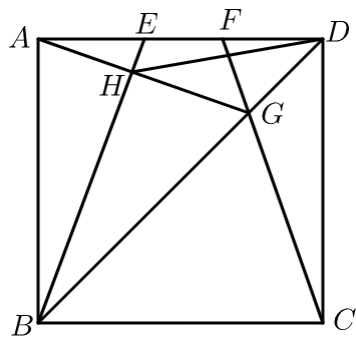
B. $\sqrt{5} - 1$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

练习8

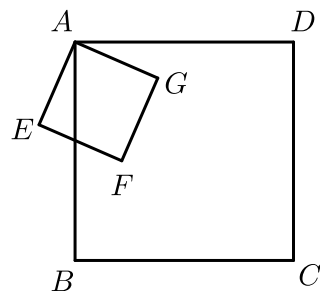
26. 如图， E ， F 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 上两个动点，满足 $AE = DF$ 。连接 CF 交 BD 于点 G ，连接 BE 交 AG 于点 H 。若正方形的边长为2，则线段 DH 长度的最小值是 _____ 。



5. 旋转最值问题

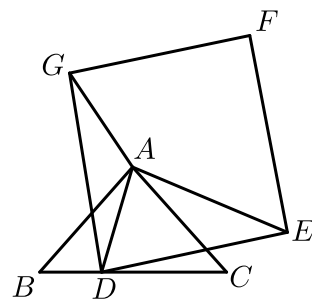
|| 例题9

27. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4cm，正方形 $AEFG$ 的边长为2cm．正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转的过程中，线段 CF 的长的最小值为 _____ cm．



|| 练习9

28. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 6$ ， D 为 BC 边一点，且 $BD : DC = 1 : 2$ ，以 D 为一个顶点作正方形 $DEFG$ ，且 $DE = BC$ ，连接 AE ，将正方形 $DEFG$ 绕点 D 旋转一周，在整个旋转过程中，当 AE 取得最大值时 AG 的长为 _____ ．



29. 如图，已知点 P 是矩形 $ABCD$ 外一动点， $AB = \sqrt{3}AD$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，且 $PA = 3$ ， $PB = 4$ ，则 PO 的最大值为 _____ ．

